تسمى [٢٤٦] مبتوس التبادل للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$. ان أقواس التبادل تخضع للقواعد الجبرية الآتية.

جامعة ... رياضيات
قسم الرياضيات
تقصير المحاضرة الرابعة

$$[\hat{A}.\hat{B}] = -[\hat{B}.\hat{A}]$$

$$[\hat{A}.\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}.\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}.\hat{C}]$$

$$[\hat{A}\hat{B}.\hat{C}] = [\hat{A}.\hat{C}]\hat{B} + A[\hat{B}.\hat{C}]$$

$$[\hat{A}.[\hat{B}.\hat{C}]] + [\hat{B}.[\hat{C}.\hat{A}]] + [\hat{C}.[A.B]] = 0$$

ويسمى أي مؤثرين يحققان المعادلة (14) بالمؤثرين المتبادلين، وبعبارة أخرى، ان أي مؤثرين لهما تابع ذاتي مشترك متبادلان.

- فضاء هلبرت والدوال (التوابع) المتعامدة.

من المعروف أن الفضاء العادي يمكن وصفه بواسطة مجموعة الاحداثيات المتعامدة (الديكارتية) والتي تتكون من ثلاثة محاور متعامدة مع بعضها البعض، وهناك متجهات اساسية هي $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ منطبقة على المحاور x, y, z على التوالي وكل مقدار منها هو وحدة واحدة وبالاتجاه الموجب لهذه المحاور وهذه المتجهات تحقق العلاقات التالية.

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad , \quad |\vec{e}_i| = 1 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

وبالتالي يمكن تمثيل أي متجه في هذا الفضاء عن طريق الجمع الخطي للمتجهات الاساسية على النحو التالي

$$\vec{r} = \vec{e}_1 . x + \vec{e}_2 . y + \vec{e}_3 z .$$

حيث x, y, z هي مساقط المتجه ($\vec{r}$) على المحاور $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ على التوالي، وتدعى عادة بمركبات المتجه. وبذلك فان المتجهات الاساسية $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ تولد فضاء ثلاثي الابعاد للمتجهات الموضع. كما انه يمكن كتابة متجه الموضع بالشكل التالي

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i x_i$$

حيث x_i تمثل المساقط و $\vec{e}_i$ المتجهات الاساسية.

يمكن تعميم هذا الوصف لجعله ملائماً لنظرية الميكانيك الكمي وذلك بأن نتخذ عدداً غير محدود من الدوال (وهي المتجهات الاساسية) والتي هي في نفس الوقت هي دوال ذاتية لمؤثر هرميتي معين؛ وسنثبت أن هذه الدوال لها خاصية التعامد ونستطيع بواسطتها توليد فضاء جديد لا متناهي الابعاد، له عدد غير محدود من المحاور، تضطلع فيه الدوال بدلاً من المتجهات، ونسمي هذا الفضاء بفضاء هلبرت. وله الخواص الآتية:

يمكن التعبير عن أي دالة اختيارية $\psi(\vec{r})$ في فضاء هلبرت بدلالة الدوال الاساسية التي تولده بطريقة المزج الخطي كالتالي.

$$\sum_{n=1} C_n U_n(\vec{r})$$